

# DISEÑO GEOMÉTRICO DE UN PROPAGADOR DE RAYOS ÓPTICOS SOBRE UN SISTEMA ACOPLADO DE LENTES

JAIRO MADRIGAL-ARGÁEZ<sup>1</sup>

 JORGE I. USMA<sup>2</sup>

JOHN A. PÉREZ<sup>3</sup>

## RESUMEN

Se presenta un esquema modular computacional para cálculo analítico y trazado geométrico de vectores los cuales al cruzarse satisfacen la ley de Snell. Este esquema es extendido a un sistema modular de lentes acoplados, dando lugar a un sistema óptico compuesto de conjuntos de lentes incrustados sobre el eje óptico.

Las lentes son parametrizadas por un índice de refracción homogéneo asociado a una región de puntos cartesianos acotados por dos radios de curvatura separados y la pupila de entrada; en tanto que la refracción (en las superficies de la lente) es calculada como la interceptación de dos vectores geométricos bajo el régimen de la ley de Snell.

**PALABRAS CLAVE:** Lente geométrica, Sistema modular de lentes, Ley de Snell, Óptica geométrica

## GEOMETRICAL DESIGN OF AN OPTICAL RAY PROPAGATOR OVER A LENS-COUPLED SYSTEM

## ABSTRACT

In this paper a computational modular scheme to calculate and draw a set of vectors which satisfy the Snell Law is presented. This scheme can be extended to build a modular coupled lenses system, so a compound optical system containing inlaid lenses over an optical axis can be admitted.

<sup>1</sup> Físico. Magíster en ingeniería. Profesor asociado, ITM Institución Universitaria. Facultad de Artes y Humanidades.

<sup>2</sup> Ingeniero Químico. Magíster en Ciencias - Química. Profesor asociado, ITM Institución Universitaria. Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas.

<sup>3</sup> Matemático. Doctor en Matemáticas. Profesor asociado, ITM Institución Universitaria. Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas.



*Autor de correspondencia: Usma, J.I. (Jorge Iván):* ITM Institución Universitaria. Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas. Calle 73 No. 76A - 354, Vía al Volador. Bloque I Segundo piso, Medellín, Colombia. Tel: (+574) 440 52 66. Correo electrónico: jorgeusma@itm.edu.co

*Historia del artículo:*

Artículo recibido: 30-VI-2017/ Aprobado: 26-IV-2017

Disponible online: 10 de mayo de 2018

Discusión abierta hasta octubre de 2019

The lenses are parametrized by a homogeneous refractive index which is associated to a Cartesian Coordinates System in which a region is limited by two separated radii of curvature and an entrance pupil while the refraction over the lens surface is calculated as the interception between two geometric vectors under Snell Law regime.

**KEYWORDS:** Geometric lens, Modular lenses system, Snell law, Geometrical optics

## DESENHO GEOMÉTRICO DE UM RAIOS ÓPTICOS PROPAGATOR EM UM SISTEMA DE LENTES ACOPLADAS

### RESUMO

Apresenta-se um esquema modular computacional para o calculo analítico e traçado geométrico de vetores os quais ao se cruzarem satisfazem a lei de Snell. Esse esquema e estendido a um sistema modular de lentes acopladas, dando lugar a um sistema óptico composto por conjuntos de lentes incorporados sobre o eixo óptico.

As lentes são parametrizadas por um índice de refração homogêneo associado a uma região de pontos cartesianos dimensionais por dois rádios de curvatura separado e a pupila de entrada; em quanto a refração (nas superfícies da lente) e calculada como a intercepção dos vetores geométricos embaixo do regime da lei de Snell.

**PALAVRAS-CHAVE:** Lente geométrica, Sistema de lentes modular, Lei de Snell, Óptica geométrica

### INTRODUCCIÓN

La historia de la Óptica Geométrica e Instrumental está relacionada con la historia de las lentes. El descubrimiento de las leyes de la reflexión y de la refracción en el siglo XVII por Snell<sup>1</sup> dio lugar a un modelo para la comprensión de la formación de las imágenes y en consecuencia, al desarrollo de instrumentos ópticos como el telescopio, el microscopio y el espectroscopio, de los cuales la mayoría de los instrumentos ópticos posteriores son modificaciones de éstos. En el siglo XIX Karl Friedrich Gauss estableció la teoría de primer orden de la óptica geométrica, basada en la ley de Snell mediante con-

sideraciones geométricas para el cálculo de la posición y el tamaño de las imágenes en lentes.

A la fecha el avance tecnológico ha proporcionado un escenario que ha favorecido el desarrollo del cálculo numérico, con lo cual ha sido posible diseñar instrumentos ópticos con mayor precisión, mediante simulación computacional y elevar así la calidad de los dispositivos ópticos, ajustando los parámetros de diseño previos a su construcción.

En este documento se expone el esquema de un modelo de representación geométrica de puntos y las relaciones entre estos, que dan lugar a un conjunto de vectores y de superficies esféricas donde se satisface la ley de Snell y está estructurado de la siguiente manera:

En la sesión 1 se establecen los parámetros topológicos de la región geométrica que acota los puntos que estructuran la lente.

La sección 2 expone el enfoque vectorial del trazado de rayos y del cálculo de la intersección de rayo - lente bajo el régimen de la ley de Snell.

1. Willebrord Snellius (Snell) (1581-1626) matemático y astrónomo holandés (profesor en la universidad de Leiden) que se dedicó al estudio de la óptica geométrica. Catorce siglos después de los experimentos de Tolomeo, Snell consiguió medir los ángulos que forman los rayos incidentes a la superficie de separación de dos medios, así como los que forman los rayos refractados y a partir de tales mediciones, formuló la ley de la refracción conocida como ley de Snell, desarrollada posteriormente por Descartes

La sección 3 presenta la descripción paramétrica de la lente geométrica y el acople modular del sistema de lentes en un arreglo matricial.

En la sección 4 se expone el esquema modular para el acople de lentes en la modelación de un sistema óptico compuesto por un grupo de lentes en secuencia.

La sección 5 presenta gráficamente el comportamiento de un vector, que cruza la región constituida por un sistema acoplado de lentes, aplicado a: un dispositivo tipo Tessar y a un modelo propio desarrollado por los autores nombrado dispositivo de telescopio Jairus.

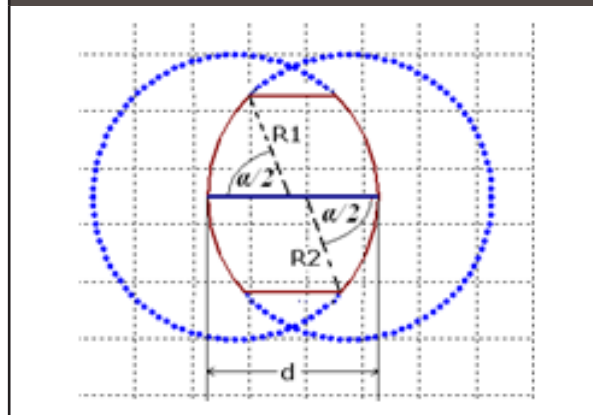
Los cálculos y representaciones geométricas han sido desarrolladas en Matlab como ambiente portador y entre los resultados alcanzados se dispone de la modelación de lentes rápidas tales como el dispositivo Tessar, además de situaciones asociadas a los sistemas ópticos del tipo de aberración esférica.

### 1. MODELO GEOMÉTRICO DE LALENTE

En términos geométricos, la lente se acota por la superficie que denota el conjunto de puntos asociados a parámetros que describen su forma y posición sobre el eje óptico. Esta superficie es parametrizada mediante por un índice de refracción,  $n$ , encerrado entre dos superficies curvas con radios curvatura,  $R_1$  para la primera superficie y  $R_2$  para la segunda, cuyos vértices están separados por una distancia  $d$  que determina el grosor de la lente (Thompson, 2001). El parámetro  $\alpha$  es asociado al ángulo visual que determina la dimensión de la pupila de la lente (Gómez González, 2012), esta descripción es ilustrada en la **Figura 1**.

Así la lente es parametrizada en términos de la localización del vértice de la primera superficie los radios de curvatura el grueso de la misma y un índice de refracción asociado a la región acotada entre los radios de curvatura separados una distancia  $d$ . En ésta, las coordenadas cartesianas de los puntos de cada superficie curva, satisfacen las **Ecuaciones (1), (2) y (3)** (Lehmann, 1989).

**Figura 1.** Construcción de la lente



$$R_l = \sqrt{(x - h_l)^2 + (y - k_l)^2} \tag{1}$$

$$x_{il} = h_l + R_l * \cos(\theta_l) \tag{2}$$

$$y_{il} = k_l + R_l * \sen(\theta_l) \tag{3}$$

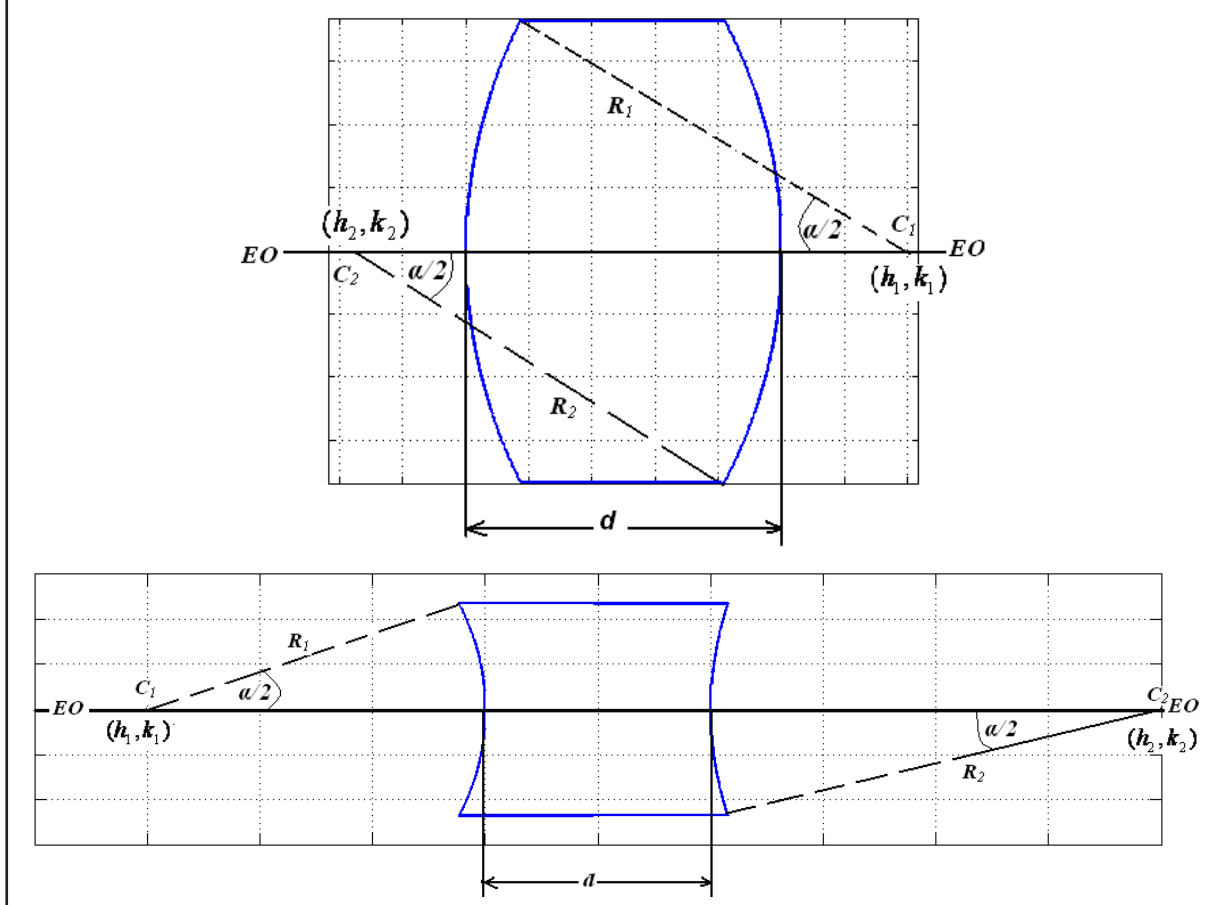
siendo  $(h_l, k_l)$  las coordenadas del centro de la lente  $l$ .  $x_{il}$  e  $y_{il}$  son las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie de la lente para  $\theta_l$ , descrito por la **Ecuación (4)** que define los rangos de la pupila de la lente. La convención de los signos para los radios de curvatura considera a  $R$  positivo si su centro está a la derecha del vértice y será negativo si su centro está a la izquierda, siempre y cuando, la dirección de los rayos de luz vaya de izquierda a derecha en la forma como aumenta la coordenada sobre el eje óptico (Hugh D. Young, 2009).

$$\theta_l \begin{cases} [\pi - \alpha/2, \pi + \alpha/2] & R < 0 \\ [-\alpha/2, \alpha/2] & R > 0 \end{cases} \tag{4}$$

### 2. TRAZADO DE RAYOS

Dado que las trayectorias en los medios homogéneos e isotrópicos son rectilíneas sobre el plano (Thompson, 2001), el rayo de luz es tratado como un vector geométrico de dos dimensiones y es definido mediante la correspondencia entre dos puntos que denotan los extremos de un segmento de recta (Mortenson, 1999), la versión paramétrica del vector presentada en la **Ecuación (5)** e ilustrada gráficamente en la **Figura 3**.

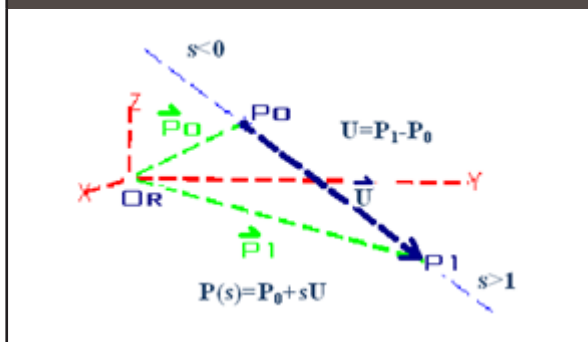
**Figura 2.** Convención de Signos para los radios de curvatura. A) Semicírculos acotados con  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$  lente convexa. B) Semicírculos acotados con  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$  lente cóncava



$$P(s) = P_0 + s \vec{U} \quad (5)$$

En esta ecuación,  $P(s)$  representa el punto geométrico de la cabeza del vector  $\vec{U}$  de magnitud  $s$  y con origen en el punto  $P_0$ .

**Figura 3.** Representación geométrica de un vector



El vector  $\vec{U}$  entre los puntos  $P_0$  y  $P_1$  es calculado mediante la diferencia relativa entre sus coordenadas paralelas como se describe en la **Ecuación (6)**.

$$U(x, y, z) = \begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ z_i - z_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

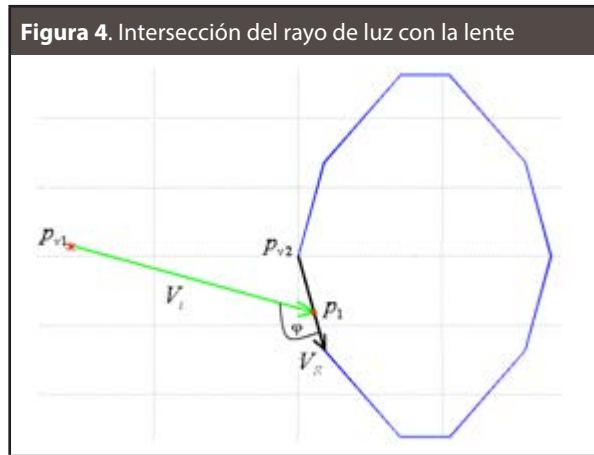
### 2.1. Cruce del rayo de luz con la lente

El punto de incidencia del rayo con la lente es calculado mediante la intersección de dos vectores. Uno de ellos, el vector  $V_s$ , es tangente a la superficie de la lente con el origen en  $p_{v2}$  como se escribe paramétricamente en la **Ecuación (7)**, es construido por dos puntos sucesivos del conjunto de puntos que definen la lente, planteado en la sección I. EL otro

vector  $V_i$  con origen  $p_{v1}$ , descrito paramétricamente por la **Ecuación (8)** (Mortenson, 1999) representa al rayo incidente como lo muestra la **Figura 4**.

$$P_2 = P_{v2} + \delta V_s \quad (7)$$

$$P_1 = P_{v1} + \kappa V_i \quad (8)$$



El punto de intersección es calculado cuando  $P_1 = P_2$ , esto lo determina el resultado de la solución del sistema de ecuaciones paramétricas (7) y (8) como sigue:

$$[V_i - V_s]^{-1} [p_{v2} - p_{v1}] = \begin{bmatrix} \kappa \\ \delta \end{bmatrix} \quad \{0 \leq \delta \leq 1\} \quad (9)$$

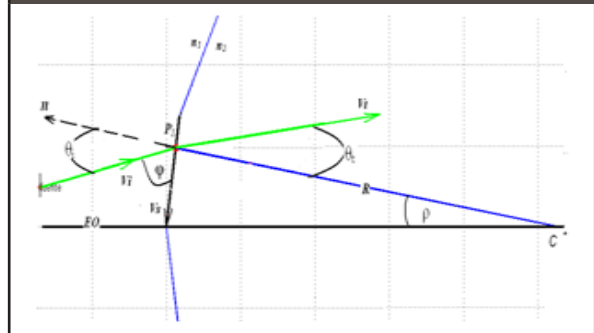
### 2.2. Ley de Snell

La ley de Snell determina la dirección (con respecto al vector normal a la superficie) de un rayo de luz que emerge de un medio con índice de refracción  $n_i$  a otro de índice  $n_t$  diferente (Wolf, 1970) (Serrano, 2005). Este es calculado a través de la **Ecuación (10)** y descrita gráficamente en la **Figura 5**.

$$\theta_t = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_i}{n_t} \text{sen}(\theta_i) \right) \quad (10)$$

El rayo incidente parte la fuente de iluminación y va dirigido hacia la lente, hasta el punto de incidencia el cual es calculado a través de la **Ecuación (9)**, y es la base para el cálculo del vector normal de la curva que da forma a la lente. Esta situación es ilustrada en la **Figura 5**.

**Figura 5.** El rayo incidente, el reflejado, el transmitido o refractado y el vector normal a la superficie en el punto de incidencia, están en el mismo plano



### 2.3. Transformación de coordenadas

Los ángulos de incidencia y de refracción son transformados al sistema de referencia fijado por el eje óptico. En la descripción geométrica exhibida en la **Figura 5**, se observan las relaciones angulares descritas en la **Ecuación (11)**.

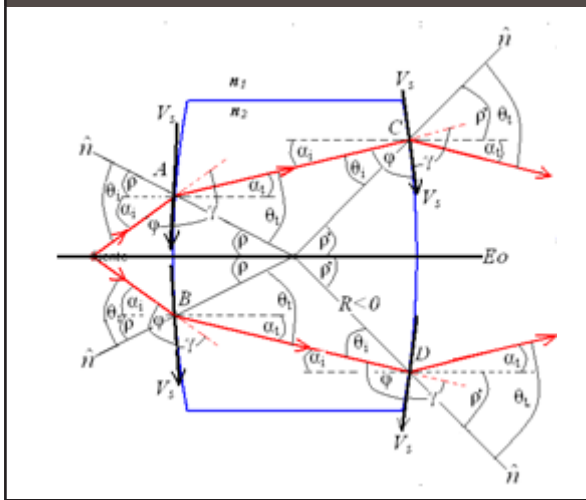
$$\begin{cases} \alpha_i = \theta_i - \rho \\ \alpha_t = \theta_t - \alpha_i \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\rho$  es el ángulo del vector normal,  $\alpha_i$  el ángulo del rayo incidente y  $\alpha_t$  el ángulo entre el rayo refractado con respecto al Eje Óptico (EO) (Thompson, 2001). La **Figura 6**, ilustra cuatro situaciones de intersección para el cálculo del ángulo de refracción  $\theta_t$ . Dos situaciones se presentan cuando el rayo entra en la región de la lente, una a cada lado del eje óptico, e igualmente cuando el rayo sale. Éstas son presentadas en función del radio de curvatura y la inclinación respecto al eje óptico del vector incidente, de la manera como se plantea en la **Tabla 1**.

**TABLA 1.** RELACIONES ENTRE LA GEOMETRÍA DE LALENTE Y EL ÁNGULO DE REFRACCIÓN COMO RESULTADO DE ESTA SELECCIÓN SE CONSTRUYE EL VECTOR  $V_t$

R	$\Phi$	$\alpha_t$	Lugar geométrico
$R > 0$	$\Phi > \pi/2$	$\alpha_t = \theta_t - \rho$	Punto B
$R > 0$	$\Phi < \pi/2$	$\alpha_t = \rho - \theta_t$	Punto A
$R < 0$	$\Phi > \pi/2$	$\alpha_t = \theta_t - \rho$	Punto D
$R < 0$	$\Phi < \pi/2$	$\alpha_t = \rho - \theta_t$	Punto C

**Figura 6.** Esquema de doble refracción



De esta manera el vector que representa el rayo refractado puede ser calculado de la manera descrita en la **Ecuación (12)**.

$$\begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix} + d * \begin{bmatrix} \cos(a_r) \\ \sin(a_r) \end{bmatrix} \quad (12)$$

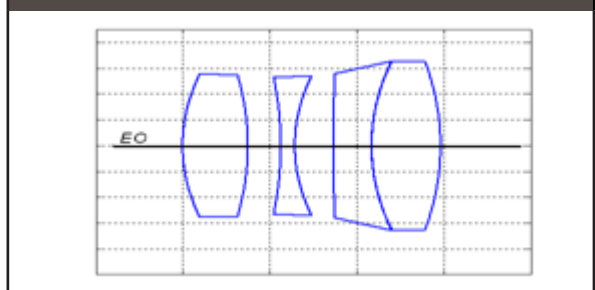
La propagación del rayo dentro de la lente el vector refractado en la primera superficie hace las veces de el vector incidente de la segunda superficie, en la cual el rayo emerge de la lente. Este procedimiento hace posible generalizar el cálculo de los vectores de incidencia y refracción de los rayos que se propagan en un sistema de lentes acoplado.

A diferencia del tratamiento matricial presentado otros autores (Halrach, 1964) y (Hetch, 2005), el cual muestra ser funcional en la óptica paraxial, el presente planteamiento aplica para lentes de mayor apertura numérica, ampliando el rango de la pupila de entrada y el grueso de la lente no tiene restricción.

### 3. ACOPLE MODULAR DE LENTES

El acople de las lentes es establecido por el vértice de la primera superficie, los radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ , el grueso  $d$ , el índice de refracción  $n$ , y el eje óptico (EO), en orden sistemático y sucesivo para su localización en el sistema. La **Tabla 2** presenta el arreglo matricial del dispositivo Tessar (Hetch, 2005) ilustrado en la **Figura 7** compuesto por cuatro lentes ordenados secuencialmente sobre el eje óptico en la dirección de  $x$ . En la matriz, las lentes son ordenadas en filas y ordenadas en una secuencia que inicia de la parte superior de la matriz. Los parámetros de la segunda lente están en la segunda fila y así en sucesión hasta el final de la tabla. La primera columna presenta el valor de la coordenada  $x$  del vértice de la primera superficie de la lente, la segunda columna contiene el valor del radio de curvatura de la primera superficie,  $R_1$ , la tercera columna contiene el radio de la segunda superficie  $R_2$ ; en la cuarta columna, el valor del grueso de la lente, la quinta contiene el índice de refracción  $n$ . El parámetro  $\delta$  denota la distancia de separación entre el vértice de la segunda superficie con el vértice de la primera superficie del lente a continuación y la última columna indica la coordenada  $y$  del eje óptico.

**Figura 7.** Sistema acoplado de lentes del dispositivo Tessar



**TABLA 2.** ARREGLO MATRICIAL DE LENTES DE UN DISPOSITIVO TESSAR

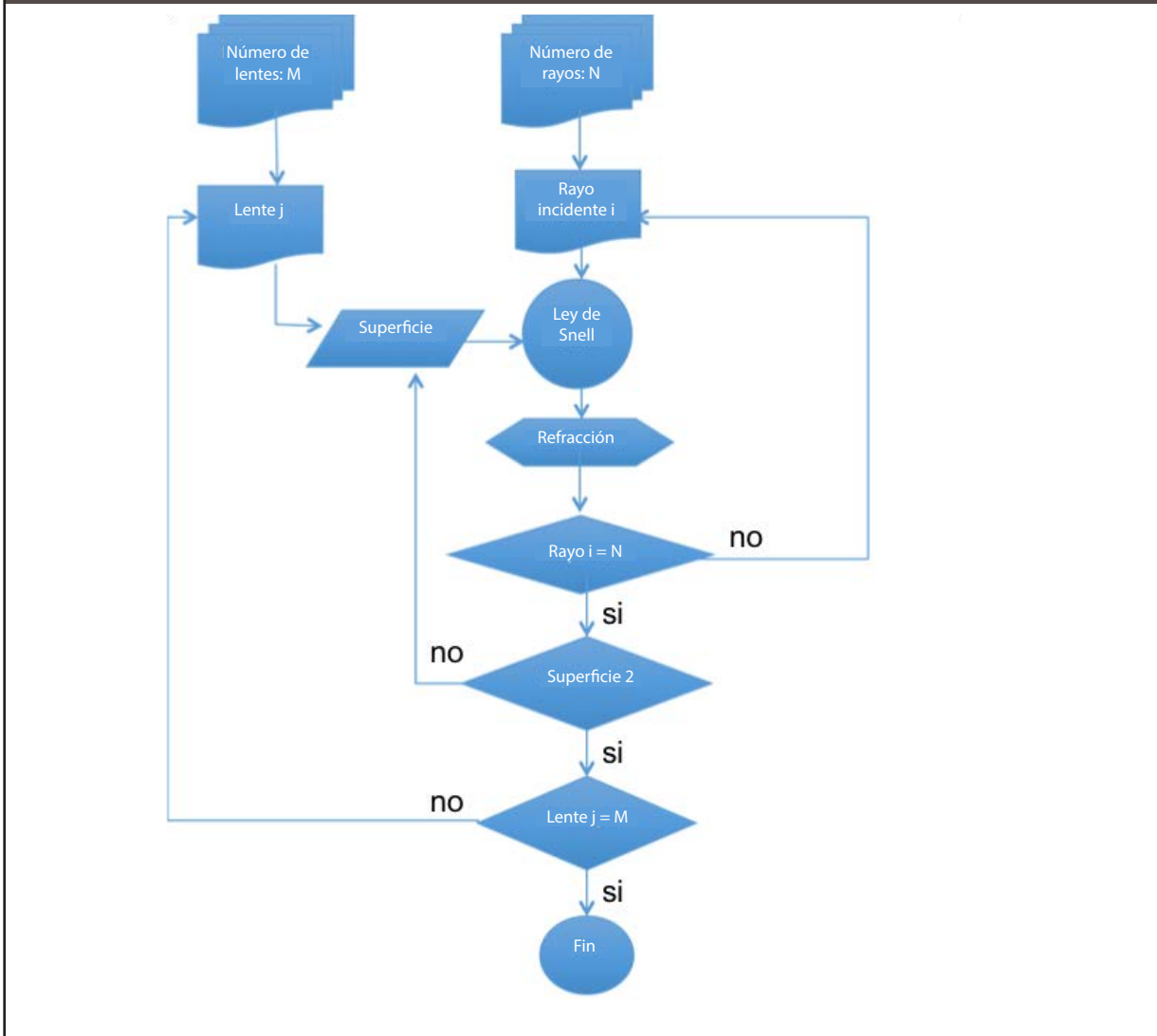
Lente	Vértice	$R_1$	$R_2$	Grueso (d)	Índice de refracción n	$\delta$	EO
1	3	1.260	-27.570	0.375	1.6116	0.189	4
2	$V_2 + d_2 + \delta_2$	-3.457	1.582	0.081	1.6053	0.525	4
3	$V_3 + d_3 + \delta_3$	50.00	1.920	0.217	1.5123	0.010	4
4	$V_4 + d_4 + \delta_4$	1.920	-2.400	0.396	1.6116		4

#### 4. ESQUEMA MODULAR DEL SISTEMA TRAZADOR DE RAYOS

En las secciones anteriores se trató un modelo geométrico para la lente y un esquema matricial modular para el acople de lentes en un sistema óptico compuesto, los cuales en conjunto con el modelo de trazado de rayos de la sección 2 provee un escenario para el diseño de sistemas ópticos compuestos.

La **Figura 8** presente el esquema de operación del sistema acoplado de lentes y rayos. En este los lentes y los vectores son construidos separadamente en la manera como se presentaron en las sesiones 1 y 2. Por un lado se toma el sistema de lentes y por el otro lado el numero de rayos que inciden sobre el sistema de lentes, tomando uno a uno las superficies de las lentes, dos por cada una, y se someten a la ley de Snell generando el grupo de rayos que se propagan por cada una de las lentes de manera individual hasta la totalidad de las lentes

**Figura 8.** Esquema algorítmico del sistema trazador de rayos en el esquema de lentes acoplado



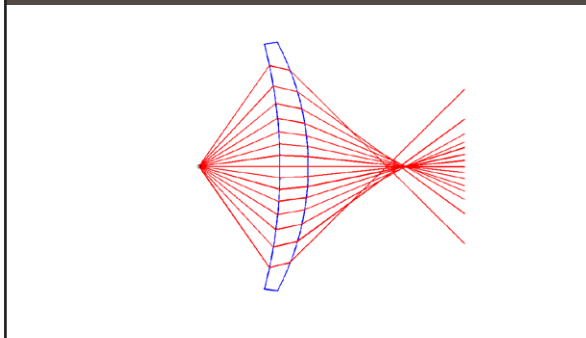


## 5. RESULTADOS

En las secciones 1, 3 y 4 se trató un modelo geométrico para la lente y un esquema matricial modular para el acople de lentes en un sistema óptico compuesto, los cuales en conjunto con el modelo de trazado de rayos de la sección 2 provee un escenario para el diseño de sistemas ópticos compuestos.

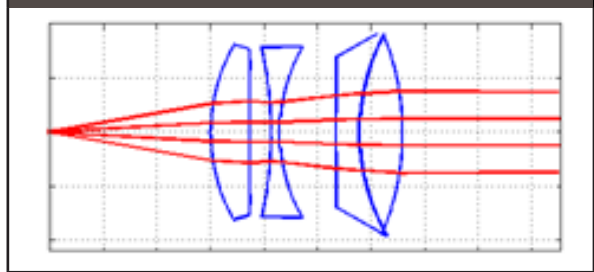
Para exhibición de la funcionalidad del esquema expuesto en este informe se han modelado tres situaciones: La primera ilustrada en la **Figura 9** presenta el modelo de trazado de rayos sobre una lente menisco cóncava que es atravesada por un conjunto de rayos. En esta puede verse como no todos los rayos cruzan el eje óptico en el mismo lugar, tal como lo define la aberración esférica.

**Figura 9.** Rayos que atraviesan un menisco cóncavo con aberración esférica



En la segunda, el dispositivo Tessar, descrito matricialmente en la **Tabla 2**, es expuesto gráficamente en la **Figura 10**. El sistema puede verse como una fuente puntual de luz que se propaga de izquierda a derecha atravesando un sistema óptico, generando a la salida de este un conjunto de rayos que se propagan hacia el infinito en forma paralela.

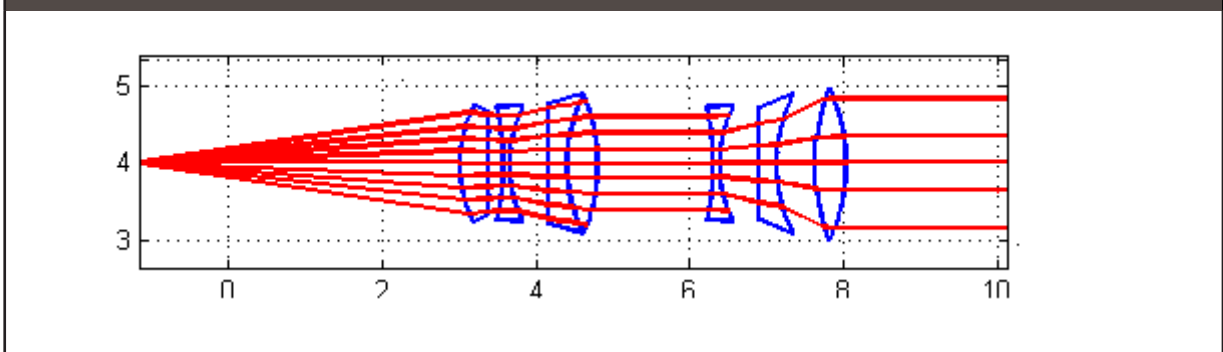
**Figura 10.** Rayos que atraviesan el dispositivo Tessar



En la tercera situación, el esquema modular se ha usado para diseñar un dispositivo de telescopio "Jairus" de mayor potencia, ilustrado en la **Figura 11**, el cual atrapa rayos que vienen desde la izquierda y los hace converger al punto imagen.

Esta interpretación se hace basado en el principio de reversibilidad<sup>2</sup> (Sagrario Millán, 2004) a través del cual puede entenderse en este dispositivo al conjunto de rayos que vienen paralelamente desde el infinito, de derecha a izquierda, y los rayos que atraviesan el sistema de lentes convergen en el punto imagen.

**Figura 11.** Dispositivo de telescopio Jairus



2. El principio de reversibilidad dice que, si no se absorbe luz, un rayo luminoso que se refleje o se refracte, volverá a describir su trayectoria original cuando se le invierta la dirección, en otras palabras, las trayectorias de la luz de diferentes medios son reversibles.



## 6. CONCLUSIONES

Este reporte expone el tratamiento de la óptica geométrica en la descripción del funcionamiento de sistemas ópticos compuestos mediante una aplicación sistemática de los principios básicos de la óptica geométrica proporcionando el fundamento del funcionamiento de las lentes esféricas.

Los aspectos resultados en el presente trabajo son de uso práctico para la comprensión de la óptica geométrica de los modelos de propagación de rayos de luz a través de los lentes y en la implementación de una amplia gama de aspectos relacionados con el diseño y funcionamiento de sistemas ópticos complejos.

## REFERENCIAS

- Gómez González, E., 2012. *Guía Básica de Conceptos de Óptica Geométrica*. [En línea] Available at: <http://laplace.us.es/campos/optica/general/opt-guia1.pdf> [Último acceso: 27 06 2017].
- Halrach, K., 1964. Matrix representation of gaussian optics. *American Journal of Physics*.
- Hetch, E., 2005. *Óptica*. 5 ed. s.l.:s.n.
- Hugh D. Young, R. A. F., 2009. *Física universitaria, con física moderna*. Decimosegunda ed. México: Addison-Wesley.
- Lehmann, C., 1989. *Geometría Analítica*. Decimatercera ed. México: Limusa, S. A. de C. V.
- Mortenson, M., 1999. *Mathematics for Computer Graphics*. Second Edition ed. s.l.:Industrial press,Inc..
- Sagrario Millán, M. y. o., 2004. *Óptica Geométrica*. Barcelona: Ariel..
- Serrano, A. C. R. y. G. U., 2005. *ÓPTICA GEOMÉTRICA Resumen de Conceptos y Fórmulas*. Puebla(Tonanzintla ): Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica .
- Thompson, D. M. a. B. J., 2001. *Stravroudis, O. "Basic Ray Optics."*. New York: Handbook of Optical Engineering, Optical Eng..
- Wolf, M. B. & E., 1970. *Principles of Optics*. 4th.ed. ed. s.l.:Pergamon Press.

**PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /  
TO REFERENCE THIS ARTICLE /  
PARA CITAR ESTE ARTIGO /**

Madrigal-Argáez, J.; Usma, J.I.; Pérez, J.A. (2018). Diseño Geométrico de un Propagador de Rayos Ópticos sobre un Sistema Acoplado de Lentes. *Revista EIA*, 15(29), enero-junio, pp. 87-95. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1129>