

Estimación de modelos lineales para el control predictivo de pequeñas centrales hidroeléctricas

Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 9, p. 63-78. Medellín, julio-diciembre de 2012

Iván Darío Estrada Viana*, Juan Alejandro Peña Palacio**,
Cristian Guarnizo Lemus***

* MSc en Automatización y Control Industrial, Instituto Tecnológico Metropolitano, e-mail: iestradv@gmail.com

** PhD Ingeniería de Sistemas, Escuela de Ingeniería de Antioquia, e-mail: pfjapena@eia.edu.co

*** MSc en ingeniería, Ingeniero Electricista, Instituto Tecnológico Metropolitano, e-mail: cristianguarnizo@itm.edu.co

ESTIMACIÓN DE MODELOS LINEALES PARA EL CONTROL PREDICTIVO DE PEQUEÑAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

Iván Darío Estrada Viana, Juan Alejandro Peña Palacio, Cristian Guarnizo Lemus

Resumen

En este artículo se lleva a cabo el modelamiento de una Pequeña Central Hidroeléctrica (PCH), mediante la obtención de modelos lineales de predicción. El modelo matemático de la central, contempla todo su sistema hidráulico, el cual va desde el tanque de captación, pasando por el túnel para el transporte del recurso hídrico, las tuberías de carga, hasta llegar a las unidades de generación. Posteriormente, se procede al modelamiento del sistema, mediante la utilización de un conjunto de modelos de predicción como los modelos ARX, ARMAX, Box-Jenkins y Output Error (OE). Los resultados obtenidos por cada uno de los modelos anteriores, fueron evaluados frente al modelo dinámico no lineal que representa el comportamiento dinámico del sistema. Esta evaluación se hizo con base en el análisis del error, así como de acuerdo con el índice de desempeño de cada modelo. De esta manera, los mejores resultados fueron obtenidos por el modelo OE, ya que este muestra de una manera directa cómo el error puede afectar la salida del sistema. Finalmente, el desarrollo de este modelo puede ser utilizado en la aplicación de controladores predictivos para la distribución de carga (potencia a generar) en Pequeñas Centrales Hidroeléctricas, con base en las condiciones de disponibilidad de agua en el tanque de captación.

Palabras clave: PCH, ARX, ARMAX, Box-Jenkins, OE

ESTIMATING LINEAR MODELS FOR PREDICTIVE CONTROL OF SMALL HYDROELECTRIC PLANTS

Abstract

This paper presents the modeling of a Small Hydroelectric Plant (PCH), by obtaining linear prediction models. The mathematical model of the system, provides all your hydraulic system, which runs from the reservoir tank, through the tunnel for the transport of water resources, load lines, up to the generation units. Subsequently, the system proceeds to modeling, using a set of prediction models like ARX models, ARMAX, Box-Jenkins and Output Error (OE). The results obtained for each of the above models were evaluated versus nonlinear dynamic model that represents the dynamic behavior of the system. This evaluation was based on error analysis and according to the performance index of each model. Thus, the best results were obtained by the OE model as this shows a direct way as the error may affect the system output. Finally, the development of this model can be used in the implementation of predictive controllers for load distribution (power generation) in Small Hydroelectric Plant, based on the conditions of water availability in the reservoir tank.

Keywords: PCH, ARX, ARMAX, Box-Jenkins, OE

Estimación de modelos lineales para el control predictivo de pequeñas centrales hidroeléctricas

Iván Darío Estrada Viana, Juan Alejandro Peña Palacio, Cristian Guarnizo Lemus

Recibido: 10 de septiembre de 2012. Aprobado: 13 de noviembre de 2012
Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 9. pp. 63-78. Medellín, julio-diciembre de 2012

1. Introducción

Las Pequeñas Centrales Hidroeléctricas (PCH), vienen cumpliendo un papel fundamental en el fortalecimiento de la generación de energía en las subregiones, y a su vez en la disminución del impacto ambiental ocasionado por la utilización de otros medios de generación de energía.

El crecimiento en el número de PCH's en la región para efectos de generación, ha hecho que los controles de dichos sistemas aumenten en complejidad, lo que ha originado el estudio de diferentes estrategias de control con el fin de incrementar su eficiencia frente al aprovechamiento del recurso hídrico.

Actualmente, las unidades de generación para la operación de las PCH, son suministradas como unidades integradas, las cuales utilizan controladores convencionales del tipo (P, PI, PID), lo que origina que estos controladores requieran de ajustes en su estructura de acuerdo con las condiciones de funcionamiento del sistema.

Esta situación ha dado espacio para la realización de estudios sobre diferentes estrategias de control avanzado, entre las que se cuentan las estrategias de control basadas en el control borroso, las redes neuronales, así como los controles adaptativos determinados por modelos predictivos, los cuales basan su metodología de diseño en la formulación de modelos lineales y no lineales, que reflejen de alguna manera el comportamiento dinámico de un sistema. Por su parte, la aplicación del control usando modelos lineales predictivos, permite conocer la evolución de un proceso en un horizonte de tiempo ante cualquier valor de la entrada, en donde dicha evolución estará afectada por la influencia de acciones pasadas y futuras sobre el sistema.

Si bien los algoritmos clásicos son aún válidos para el mantenimiento de la estabilidad en las variables de los sistemas, estos presentan una limitación en su respuesta ante determinados comportamientos, los cuales generalmente están caracterizadas por la aparición

de no linealidades, retardos puros, respuestas inversas, así como del acoplamiento entre variables. Estas situaciones, inherentes a su propia concepción y diseño, son la causa de la inestabilidad de un sistema (Salcedo y Correa, 2008).

Para el caso particular de este trabajo de investigación, un sistema PCH está compuesto de forma general de un tanque de captación, un túnel, dos tuberías de carga y dos unidades de generación, en donde el uso de controles predictivos, permite conocer el modelo matemático que rige su comportamiento dinámico en un futuro, evitando la inestabilidad del sistema ante posibles cambios inesperados de su comportamiento.

Para obtener el modelo del sistema se utilizaron diferentes modelos de predicción, entre los que se destacan aquellas de predicción lineal del tipo *Auto Regressive with Exogenous input* (ARX), *Auto Regressive with Moving Average and Exogenous input* (ARMAX), *Box-Jenkins* y *Output Error* (OE). Cada uno de estos modelos, fue evaluado de acuerdo con el error, y de acuerdo con su desempeño frente al modelo no lineal que representa la dinámica de un sistema de este tipo.

Los resultados obtenidos mostraron que el modelo OE, es el que mejor se comporta frente al modelo no lineal que representa el sistema, ya que éste muestra estructuralmente cómo el error puede afectar de manera directa la res-

puesta del sistema. De esta manera, los resultados permitieron evidenciar que este tipo de modelos pueden ser utilizados para el diseño de controladores predictivos en la distribución de carga (potencia a generar) en Pequeñas Centrales Hidroeléctricas PCH, con base en las condiciones de disponibilidad de agua en el tanque de captación.

2. Metodología

Con el fin de obtener el modelo matemático general que rige el comportamiento dinámico de una Pequeña central Hidroeléctrica (PCH), se hace necesaria la definición del modelo hidráulico completo del sistema.

2.1 Modelo matemático de una PCH

La potencia generada por las turbinas de un PCH, se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_m = \rho * g * Q * H * n_t \quad (1)$$

Donde, P_m es la potencia (W) generada por la turbina (CV), ρ es la densidad del agua (gr/m^3), g es la aceleración de la gravedad (m/s^2), H es el salto neto (m), Q es el caudal nominal del agua (m^3/s) y n_t es la eficiencia de la turbina.

El tipo de PCH que se analiza en este artículo, posee un solo tanque de captación, un canal de transporte común y dos unidades de generación o turbinas, las cuales son independientes como se muestra en la Figura 1.

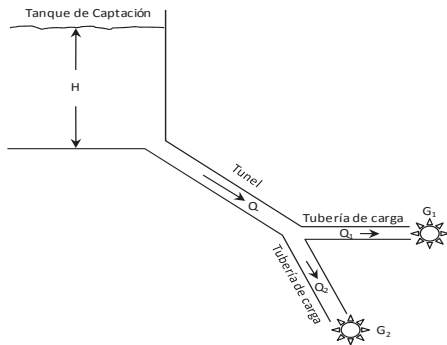


Figura 1. PCH con dos unidades de generación

2.1.1 Modelo hidráulico de la dinámica del tanque de captación

El tanque de captación se compone de un depósito de dimensiones suficientes para represar el agua proveniente de un río a través de un canal de conducción, limitando así la turbulencia del agua que se introduce en él. Adicionalmente, este es un elemento de seguridad frente a las diferencias de caudal que se presentan en el canal que llega a la turbina.

Durante la operación de la central, el tanque de captación permite almacenar ciertos excesos de agua procedentes del canal, de tal forma que esto permite evitar el ingreso de aire a las tuberías de carga cuando el caudal turbinado es mayor al que llega a través del canal.

La ecuación (2) representa el comportamiento del tanque de captación, la cual establece un balance de caudales entrante (Q_i) y saliente o turbinado (Q_o), y determina la variación del nivel del agua en la captación (H) provocada por

la diferencia de los caudales (Sarasúa, 2009).

$$A_c \frac{dH}{dt} = Q_i - Q_o \quad (2)$$

2.1.2 Modelo hidráulico de la dinámica del sistema

Para la definición del modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de una PCH (túnel, tuberías de carga y unidades de generación), se utiliza la ley de movimiento de Newton, la cual será aplicada a la masa de agua a través de cada conducto hidráulico.

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, en la cual se determina que la sumatoria de flujos es igual a cero, en la ecuación (3) se puede decir que:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (3)$$

El detalle en la definición del modelo hidráulico para un sistema similar (posee un tanque de captación, un túnel, tuberías de carga y tres turbinas) puede ser observado en Mahmoud *et al.*, (2004), Mahmoud *et al.* (2005), y en donde el flujo para cada turbina y su respectiva válvula, está dado por las ecuaciones (4) y (5):

$$Q_1 = G_1 \sqrt{2gH_1} \quad (4)$$

$$Q_2 = G_2 \sqrt{2gH_2} \quad (5)$$

Una vez definidas estas expresiones, y teniendo en cuenta la ecuación (1), se puede decir que cada turbina es una función de la válvula de regulación (*Gate*, G_1 y G_2), sabiendo que esta

relación no es necesariamente lineal, y que la turbina no es 100% eficiente.

Por lo tanto, es necesario tener en cuenta, como se indica en la ecuación (6), otros parámetros que inciden sobre el comportamiento dinámico de cada turbina, como el no flujo q_{NL} , que se obtiene de la resta del flujo actual y el rendimiento del flujo efectivo, y λ que representa un parámetro de perturbación del medio ambiente que afecta la temperatura y la densidad del agua.

$$P_m = \lambda * \rho * g * (Q - q_{NL}) * H * n_T \quad (6)$$

Simplificando la ecuación (6) se obtiene la ecuación (7), la cual indica que la ganancia A_t de la turbina es:

$$A_t = \lambda * \rho * g * n_T \quad (7)$$

También es de vital importancia tener en cuenta las pérdidas teóricas que el sistema puede presentar, las cuales están determinadas por las ecuaciones (8) y (9):

$$h_f = f_p * Q^2 \quad (8)$$

Donde,

$$f_p = \frac{L}{D} * \frac{f}{2g} * \frac{1}{A_c^2} \quad (9)$$

f es el factor de fricción, L es la longitud del conducto (m), D es el diámetro interno del conducto (m) y A_c es el área de la sección entre la válvula y la tubería (m^2).

La Figura 2 presenta el diagrama general del sistema hidráulico para la PCH:

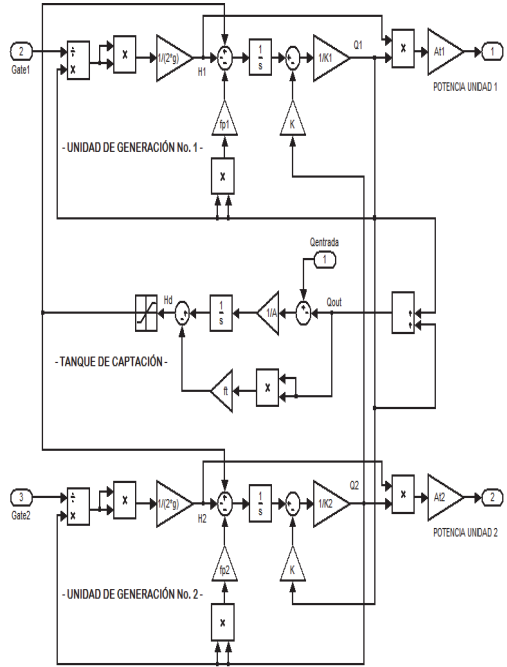


Figura 2. Modelo matemático general de la PCH

Donde,

$$K_1 = \left[\frac{L_1}{g(A_{c1})} + \frac{L}{g(A_c)} \right] \quad (10)$$

$$K_2 = \left[\frac{L_2}{g(A_{c2})} + \frac{L}{g(A_c)} \right] \quad (11)$$

$$K = \left[\frac{L}{g(A_c)} \right] \quad (12)$$

2.2 Estimación de modelos predictivos

Con el fin de realizar una correcta estimación del modelo de predicción para una Pequeña Central Hidroeléctrica PCH, se evaluaron diferentes modelos de predicción tales como: *Auto*

Regressive with Exogenous input (ARX), *Auto Regressive with Moving Average and Exogenous input* (ARMAX), *Box-Jenkins y Output Error* (OE) (Arafet et al., 2008) y (Sedano y Villar, 2005).

2.2.1 Modelo ARX

El modelo *auto regressive with exogenous input* (ARX), es comúnmente seleccionado como la primera opción en la identificación de sistemas lineales. El modelo ARX, se denota y define como se indica en la ecuación (13):

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t) \quad (13)$$

Donde,

$u(t)$: Entrada del sistema

$e(t)$: Perturbación del sistema

$y(t)$: Salida del sistema

$A(q)$, $B(q)$: representan los polinomios que describen la dinámica del proceso sistema, teniendo en cuenta lo indicado en las ecuaciones (14) y (15):

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na} \quad (14)$$

$$B(q) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb+1} \quad (15)$$

2.2.2 Modelo ARMAX

El modelo *auto regressive with moving average and exogenous input* (ARMAX), describe el error en la ecuación como un promedio móvil. El modelo ARMAX se denota y define como se indica en las ecuaciones (16) y (17):

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (16)$$

Donde,

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \quad (17)$$

2.2.4 Modelo Output Error

El modelo Output-Error (OE), es un tipo de modelo ARMAX, el cual posee una relación de entrada/salida sin perturbación, y que adicionalmente posee ruido blanco en la salida. El Modelo OE, se denota y define como se indica en la ecuación (21):

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - nk) + e(t) \quad (21)$$

2.2.3 Modelo Box-Jenkins

El Modelo Box-Jenkins, es una generalización del modelo OE, el cual se define como un modelo ARMAX con una relación de entrada/salida sin perturbación, más ruido blanco en la salida. El modelo Box-Jenkins se denota y define como se indica en las ecuaciones (18), (19) y (20):

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (18)$$

Donde,

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd} \quad (19)$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{nf}q^{-nf} \quad (20)$$

2.3 Criterios de desempeño

Con el fin de determinar el índice de desempeño de cada uno de los modelos predictivos propuestos para el modelamiento del sistema, se hace uso de los criterios que se indican a continuación, y que permiten determinar el comportamiento del error dinámico del sistema, frente al modelo no lineal que

representa dicho sistema (Farkh *et al.*, 2010).

2.3.1 Criterio integral del error absoluto (IAE)

La integral del valor absoluto del error IAE se denota y define:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (22)$$

Este criterio tiene la característica de ser de fácil aplicación, ya que proporciona amortiguamiento y respuesta aceptable a la salida del lazo de control. Sin embargo, este criterio no tiene la capacidad de optimizar sistemas altamente sobreamortiguados, o altamente subamortiguados.

2.3.2 Criterio integral de tiempo por el error absoluto (ITAE)

La integral del tiempo por el error absoluto está representada por:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (23)$$

Bajo este criterio se obtienen respuestas transitorias con pequeños sobreimpulsos y oscilaciones amortiguadas.

Debido a que el valor absoluto del error se encuentra multiplicado por el tiempo, los errores grandes son multiplicados por tiempos pequeños. Esto origina que los errores grandes tengan poco

peso, y los errores pequeños tengan mayor peso.

2.3.3 Criterio integral del error cuadrático (ISE)

La integral del error cuadrático está representada por:

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (24)$$

Este criterio origina una rápida disminución de los errores grandes a través de la curva del error cuadrático, con lo cual se produce una respuesta de escasa estabilidad relativa, debido a las oscilaciones presentadas en la señal de salida.

2.3.3 Criterio integral de tiempo por el error cuadrático (ITSE)

La integral del tiempo por el error cuadrático está representada por (25):

$$ITSE = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt \quad (25)$$

En comparación con el criterio ITAE, se caracteriza por dar poco peso a los errores grandes, pero castiga a los errores presentes poco tiempo después del inicio de la entrada al sistema.

Al igual que el criterio ISE, al disminuir los errores grandes rápidamente, se obtiene un sistema con estabilidad relativa pobre, debido a las oscilaciones presentadas a la salida del sistema.

3. Metodología

3.1 Modelo matemático general de la Pequeña Central Hidroeléctrica

Teniendo en cuenta un modelo matemático no lineal que rige el comportamiento dinámico de cada una de las etapas y equipos que hacen parte de una pequeña central hidroeléctrica (tanque de captación, líneas de transporte del recurso hidráulico y unidades de generación), se procedió con la aplicación de cada uno de los modelos mencionados anteriormente para la representación del sistema PCH descrito anteriormente. Para el caso particular de la PCH propuesta, ésta tiene una capacidad máxima de generación de 20 MW dividida en dos unidades de generación de 10 MW cada una.

Para la simulación del sistema, se hizo uso del *Software Simulink de Matlab*, en donde los parámetros de simulación se indican en la Tabla N°1.

Tabla 1. Parámetros de simulación

L	100	HD	115 máx.
L_1, L_2	20	A_{c1}, A_{c2}	2
Ac	6	K	1,7
K_1, K_2	2,72	η	0,76
f_t	1.025×10^{-3}	f_{p1}, f_{p2}	3.186×10^{-3}

3.2 Modelo de predicción

Para determinar el modelo de predicción lineal estimado, se llevaron a cabo

una serie de pruebas y simulaciones, utilizando los modelos ARX, ARMAX, Box-Jenkins y Output Error.

Para el modelamiento del sistema, se utilizó la herramienta del *software MATLAB*, la cual incorpora cada uno de los modelos de identificación mencionados anteriormente. De acuerdo con lo anterior, se utilizaron los siguientes parámetros: na, representa el grado del polinomio A(q); nb, representa el grado del polinomio B(q)+1; nc, representa el grado del polinomio para C(q); nd, representa el grado del polinomio para D(q); nf, indica el grado del polinomio para F(q), y nk, indica el retraso fundamental de la respuesta del sistema para el polinomio B(q). Estos valores determinan el orden de los polinomios de cada función, así como el retardo de la entrada de acuerdo con la ecuación (18).

Para las simulaciones ejecutadas con los modelos predictivos, se consideró una señal de entrada en escalón de 0.75, el cual representa porcentualmente la apertura de la válvula de entrada a las unidades de generación, para un caudal de entrada $Q_i = 50 \text{ m}^3/\text{s}$.

4. Análisis de resultados

4.1 Modelo ARX

En la Figura 3, se puede observar el modelo de la turbina 1. Los parámetros utilizados para el modelo de acuerdo con la ecuación (18) fueron los siguientes: na=2, nb=1 y nk=1.

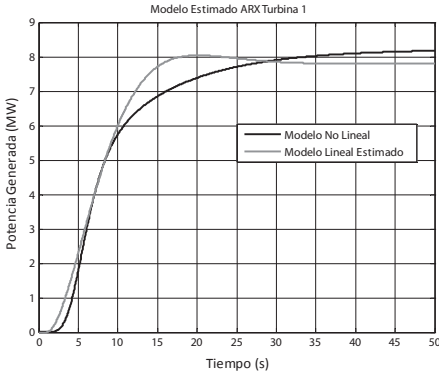


Figura 3. Modelo estimado ARX Turbina 1

El modelo matemático estimado por medio del modelo ARX para el sistema fue el siguiente:

$$A(q) = 1 - 1,982q^{-1} + 0,9818q^{-2} \quad (26)$$

$$B(q) = 0,001557q^{-2} \quad (27)$$

El error cuadrático medio obtenido por el modelo ARX frente a la respuesta del sistema fue de 0,1505.

En la Figura 2, se puede observar el modelo de la turbina 2. De esta manera, los parámetros que presentaron mejores resultados frente al modelamiento fueron los siguientes: $na=2$, $nb=1$ y $nk=1$.

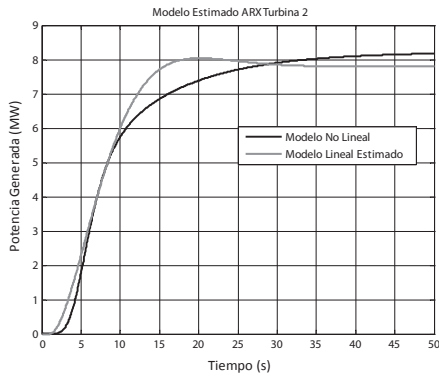


Figura 4. Modelo estimado ARX Turbina 2

El modelo matemático estimado para la turbina 2 mediante la utilización del modelo ARX fue el siguiente:

$$A(q) = 1 - 1,987q^{-1} + 0,9813q^{-2} \quad (28)$$

$$B(q) = 0,09591q^{-2} + 0,1127q^{-3} - 0,1003q^{-4} \quad (29)$$

El error cuadrático medio obtenido por el modelo propuesto frente a la respuesta del sistema fue de 0,1503.

En la Tabla 2, se presentan una serie de parámetros de simulación, los cuales arrojaron los siguientes resultados en cuanto al error cuadrático estimado; y en donde el valor en negrilla, corresponde a los parámetros con los cuales la respuesta del sistema presentó el menor error para el modelo ARX:

Tabla 2. Error cuadrático medio estimado ARX

ECM ESTIMADO MODELO ARX				
na	nb	nk	TURBINA 1	TURBINA 2
2	1	1	0,1505	0,1503
3	3	2	0,3323	0,3321
4	3	3	0,3014	0,3013
4	1	0	0,4295	0,4293

4.2 Modelo ARMAX

De acuerdo con la estructura del modelo ARMAX, en la Figura 5 se muestra el modelo para la turbina 1, en donde los parámetros que presentaron los mejores resultados se indican a continuación: $na=3$, $nb=1$, $nc=2$ y $nk=1$.

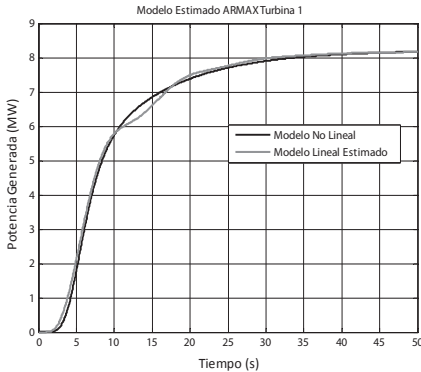


Figura 5. Modelo estimado ARMAX turbina 1

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$A(q)=1-2,975q^{-1}+2,95q^{-2}-0,9757q^{-3} \quad (30)$$

$$B(q)=6,693e^{-5} q^{-1} \quad (31)$$

$$C(q)=1-1,906q^{-1}+0,9476q^{-2} \quad (32)$$

El error cuadrático medio obtenido por el modelo ARX frente a la respuesta del sistema fue de 0,0140.

En la Figura 6 se muestra el comportamiento de la turbina 2 de acuerdo con el modelo ARMAX. Para este modelo, los parámetros utilizados fueron los siguientes: $na=3$, $nb=1$, $nc=2$ y $nk=1$.

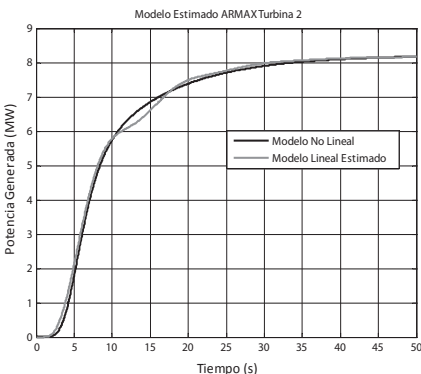


Figura 6. Modelo estimado ARMAX turbina 2

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$A(q)=1-2,973q^{-1}+2,97q^{-2}-0,9758q^{-3} \quad (33)$$

$$B(q)=6,694e^{-5} q^{-1} \quad (34)$$

$$C(q)=1-1,904q^{-1}+0,9478q^{-2} \quad (35)$$

El error cuadrático medio del modelo ARMAX frente al modelo no lineal fue de 0,0139.

La Tabla 3 presenta una serie de parámetros que configuran diferentes modelos para el modelo ARMAX. Las letras en negrilla muestran la mejor combinación de parámetros para el modelamiento del sistema en términos de este modelo.

Tabla 3. ECM estimado modelo ARMAX

ECM ESTIMADO MODELO ARMAX					
na	nb	nc	nk	TURBINA 1	TURBINA 2
2	1	1	1	0,2500	0,2499
3	1	2	1	0,0140	0,0139
4	3	3	3	0,0238	0,0236
5	4	3	2	0,0180	0,0178

4.3 Modelo Box-Jenkins

En la Figura 7 se puede observar el comportamiento de la turbina 1, de acuerdo con el modelo obtenido en conformidad con la Metodología de *Box and Jenkins*. Los parámetros utilizados para la obtención de este modelo fueron los siguientes: $na=4$, $nb=4$, $nc=3$ $nf=3$ y $nk=3$.

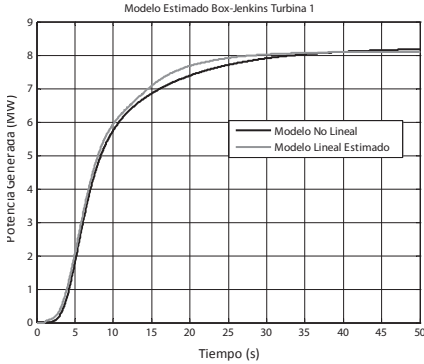


Figura 7. Modelo estimado Box-Jenkins turbina 1

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$B(q) = 0,01532q^{-3} - 0,03209q^{-4} + 0,01722q^{-5} - 0,0003362q^{-6} \quad (36)$$

$$C(q) = 1 - 1,604q^{-1} + 0,6597q^{-2} + 0,666q^{-3} - 0,6334q^{-4} \quad (37)$$

$$D(q) = 1 - 2,769q^{-1} + 2,542q^{-2} - 0,7733q^{-3} \quad (38)$$

$$F(q) = 1 - 2,959q^{-1} + 2,92q^{-2} - 0,9608q^{-3} \quad (39)$$

El error cuadrático medio obtenido a partir de la utilización de la metodología de Box-Jenkins frente a la respuesta del sistema fue de 0,0136.

En la Figura 8 se puede observar el modelo para la turbina 2 de acuerdo con la metodología de Box and Jenkins. Los parámetros que presentaron mejores resultados se indican a continuación: $na=4, nb=4, nc=3, nf=3$ y $nk=3$.

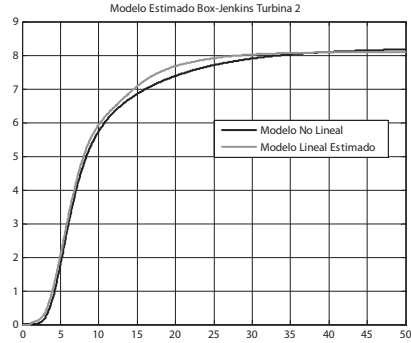


Figura 8. Modelo estimado Box-Jenkins turbina 2

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$B(q) = 0,01535q^{-3} - 0,03208q^{-4} + 0,01721q^{-5} - 0,0003361q^{-6} \quad (40)$$

$$C(q) = 1 - 1,603q^{-1} + 0,6598q^{-2} + 0,667q^{-3} - 0,6334q^{-4} \quad (41)$$

$$D(q) = 1 - 2,770q^{-1} + 2,544q^{-2} - 0,7734q^{-3} \quad (42)$$

$$F(q) = 1 - 2,957q^{-1} + 2,94q^{-2} - 0,9607q^{-3} \quad (43)$$

El error cuadrático medio obtenido por la metodología de Box – Jenkins frente a la respuesta del sistema fue de 0,0137.

La Tabla 4 presenta una serie de parámetros utilizados de acuerdo con la estructura de la modelo de Box and Jenkins. Los resultados arrojados por el modelo frente a la respuesta del sistema para diferentes combinaciones de parámetros fueron los siguientes:

Tabla 4. ECM estimado modelo BOX-JENKINS

ECM ESTIMADO MODELO BOX-JENKINS						
nb	nc	nd	nf	nk	TURBINA 1	TURBINA 2
2	1	1	2	1	1,5449	1,5451
3	1	2	2	1	0,0681	0,0682
4	3	2	2	0	0,1573	0,1575
4	4	3	3	3	0,0136	0,0137

De la Tabla 4 se puede observar que los datos que se encuentran en negrilla, corresponden a los parámetros con los cuales la respuesta del modelo presentó menor error.

4.4 Modelo Output Error

En la Figura 9 se puede observar el comportamiento de la turbina 1 de acuerdo con el modelo OE. De acuerdo con lo anterior, los parámetros que presentaron mejores resultados se indican a continuación: nb=4, nf=3 y nk=0.

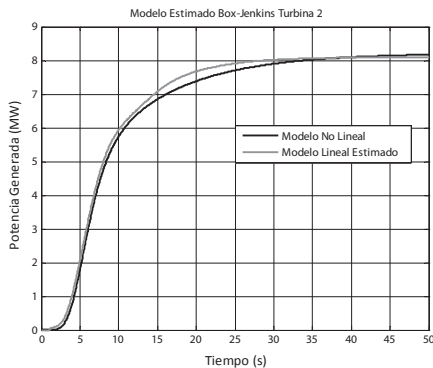


Figura 9. Modelo estimado Output-Error turbina 1

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$B(q) = 0,378 - 1,177 q^{-1} + 1,222 q^{-2} - 0,4224 q^{-3} \tag{44}$$

$$F(q) = 1 - 2,967 q^{-1} + 2,935 q^{-2} - 0,9679 q^{-3} \tag{45}$$

El error cuadrático medio obtenido por el modelo OE frente a la respuesta del sistema fue de 0,0054.

En la Figura 10 se puede observar el comportamiento de la turbina 2 de acuerdo con el modelo OE. Los parámetros que presentaron los mejores resultados fueron los siguientes: nb=4, nf=3 y nk=0.

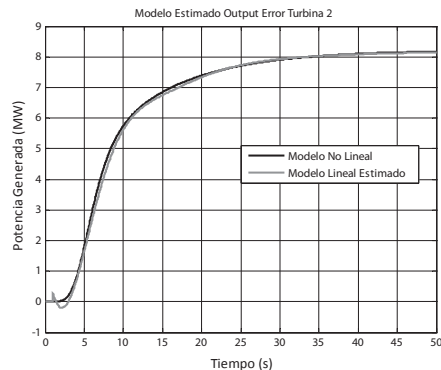


Figura 10. Modelo estimado Output-Error turbina 2

El modelo matemático estimado del sistema se presenta a continuación:

$$B(q) = 0,378 - 1,176 q^{-1} + 1,224 q^{-2} - 0,4223 q^{-3} \tag{46}$$

$$F(q) = 1 - 2,966 q^{-1} + 2,937 q^{-2} - 0,9678 q^{-3} \tag{47}$$

El error cuadrático medio obtenido por el modelo OE frente a la respuesta del sistema fue de: 0,0055.

En la Tabla 5 se pueden observar los errores cuadráticos medios para diferentes configuraciones del modelo propuesto frente al modelo no lineal del sistema. Los resultados que se muestran en negrilla, corresponden a los parámetros con los cuales la respuesta del sistema presentó menor error:

Tabla 5. ECM estimado modelo OE

ECM ESTIMADO MODELO OE				
nb	nf	nk	TURBINA 1	TURBINA 2
3	2	1	0,0237	0,0238
3	3	2	2,0950	2,0951
4	2	0	0,0237	0,0239
4	3	0	0,0054	0,0055

3.5 Análisis del error

A partir de los resultados obtenidos en la definición del modelo de predicción lineal una vez ejecutadas las simulaciones utilizando modelos ARX, ARMAX, Box-Jenkins, Output Error, en la Tabla 6 se puede observar que el modelo que mejores resultados presentó frente al error cuadrático medio fue el modelo OE, obteniendo un error de 0,0054 para la turbina 1 y de 0,0055 para la turbina 2.

Tabla 6. Error cuadrático medio estimado

ERROR CUADRÁTICO MEDIO ESTIMADO								
na	nb	nc	nd	nf	nk	TURBINA 1	TURBINA 2	MODELO
2	1	-	-	-	1	0,1505	0,1503	ARX
3	1	2	-	-	1	0,0140	0,0139	ARMAX
-	4	4	3	3	3	0,0136	0,0137	BJ
-	4	-	-	3	0	0,0054	0,0055	OE

Un criterio adicional, y con el cual se dio una mayor validez a los resultados presentados en la estimación del modelo, es el índice de desempeño. De esta manera, en la Tabla 7 se presentan los resultados del desempeño del sistema para cada una de las simulaciones ejecutadas de acuerdo con cada uno de los modelos de predicción utilizados.

El análisis de desempeño realizado sobre cada uno de los modelos obtenidos para cada una de las turbinas, se basó en el error obtenido de acuerdo con el criterio integral del error absoluto (IAE), el criterio integral de tiempo por el error absoluto (ITAE), el criterio integral del error cuadrático (ISE), y el criterio integral de tiempo por el error cuadrático (ITSE).

Tabla 7. Índice de desempeño modelo lineal estimado

ÍNDICE DE DESEMPEÑO MODELO LINEAL ESTIMADO								
ÍNDICE	ARX		ARMAX		BJ		OE	
	TURB 1	TURB 2	TURB 1	TURB 2	TURB 1	TURB 2	TURB 1	TURB 2
IAE	2,4E+02	2,1E+02	1,1E+02	1,2E+02	7,6E+02	3,0E+05	1,3E+02	1,3E+02
ITAE	4,6E+03	4,1E+03	2,3E+03	2,6E+03	2,6E+04	9,8E+06	1,4E+03	1,4E+03
ISE	9,5E+01	8,1E+01	1,7E+01	2,1E+01	8,5E+02	1,2E+08	4,1E+01	4,3E+01
ITSE	1,3E+03	1,0E+03	3,1E+02	3,7E+02	3,2E+04	4,1E+09	3,0E+02	3,2E+02

Para el caso particular de la Tabla 7, y de acuerdo con los modelos de predicción utilizados, los mejores resultados de desempeño en la definición del modelo de predicción lineal estimado fueron:

- ARMAX según los criterios IAE (110,8845 para la turbina 1 y 120,9147 para la turbina 2) e ISE (17,4825 para la turbina 1 y 20,717 para la turbina 2).
- Output Error según los criterios ITAE (1,39E+03 para la turbina 1 y 1,44E+03 para la turbina 2) e ITSE (300,5568 para la turbina 1 y 316,8523 para la turbina 2).

5. Conclusiones

Un análisis adecuado para el comportamiento dinámico de una pequeña central hidroeléctrica PCH, debe involucrar no solo el modelo de las unidades de generación, sino también de todos los demás componentes hidráulicos que hacen parte del proceso: tanque de captación, líneas de transporte del recurso hidráulico, etc. De esto depende que el modelamiento y la posterior implementación de un controlador en términos de un modelo de este tipo, arroje buenos resultados.

Con base en los resultados obtenidos por los modelos frente al error cuadrático medio estimado, así como frente al índice de desempeño, se puede concluir que el modelo obtenido por medio de modelos de predicción lineal basados

en métodos paramétricos como el ARX, el ARMAX, el método Box-Jenkins y Output error, pueden ser utilizados para la definición de controladores predictivos, especialmente el OE, el cual mostró los mejores resultados para ambos criterios.

Para la implementación de controladores predictivos, es importante observar el comportamiento del sistema utilizando el modelo ARMAX, que aunque no fue el mejor en cuanto a los resultados arrojados frente al error cuadrático medio, presentó resultados que resultan promisorios frente al índice de desempeño, y frente a las características de una PCH.

La selección de los parámetros utilizados para cada modelo, y que determinan su comportamiento ideal frente al sistema, se realizó a través de la utilización del diagrama de autocorrelación y autorrelación parcial, lo que permitió definir una serie de configuraciones sobre la estructura de los modelos utilizados.

Como trabajo futuro, se propone la utilización de optimizadores basados en modelos por evolución, entre los que se incluyen los modelos EPR (*evolutionary Polynomial Regression*), Algoritmos de Estimación de la Distribución o algoritmos del tipo *Particle Swarm Optimization* (PSO), lo que ayudará a que los modelos de predicción representen de una forma más natural la dinámica de un sistema PCH.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor de tesis, Cristian Guarnizo Lemus y al profesor Juan Alejandro Peña Palacio por su apoyo y dedicación en la elaboración de este artículo y los trabajos previos, para obtener los resultados que aquí se presentan. También quiero agradecer al Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) por facilitarme los recursos necesarios para el desarrollo de este trabajo, y a la Escuela de Ingeniería de Antioquia por apoyar estos procesos investigativos a través de convenios interinstitucionales.

Referencias

- Salcedo R. y Correa R., SICOMPC: Simulador para control predictivo basado en modelos. *Sistema de información científica, red de revistas científicas de América latina y el Caribe, España y Portugal*. Universidad nacional de Colombia. Dyna, Vol. 75, Num. 156, noviembre 2008, pp 89-98.
- Sarasúa. J. Control de minicentrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Departamento de ingeniería civil, hidráulica y energética. Escuela Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos. 2009, Madrid, España.
- Mahmoud, M. Dutton K. y Denman. M. Dynamical modeling and simulation of a cascaded reservoirs hydropower plant. *Science Direct*. Electric power systems research 70, 2004 A, 129-139.
- Mahmoud, M. Dutton K. y Denman. M. Design and simulation of a nonlinear fuzzy controller for a hydropower plant. *Science Direct*. Electric power systems research 73, 2005, 87-89.
- Farkh, R. Laabidi K. y Ksouri. M. PI Stabilization for time delay system. MOSIM'10. May 10-12, 2010. Hammamet, Tunisia.
- Arafet, P., Chang, F., Torres M. y Domínguez H. Métodos de identificación dinámica. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Universidad de Oriente. Junio, 2008.
- Sedano J., y Villar. R. Introducción a la identificación de sistemas. *Técnica Industrial* 256. Marzo, 2005.